Análise Numérica

Nelson Mulemba

Métodos Iterativos para cálculo de raizes aproximadas

Maputo, August 19, 2024

Índice

Nesta secção, vamos estudar procedimentos ou métodos iterativos para encontrar aproximações de zeros de funções reais, ou seja, os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

Teorema de Bolzano

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então f possui pelo menos um zero no intervalo aberto (a, b). Ou seja, se a função muda de sinal entre a e b (isto é, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos), então existe pelo menos um ponto c dentro do intervalo onde a função f é igual a zero.

Refinamento

Uma vez que os intervalos contendo os zeros são identificados, utiliza-se uma técnica de refinamento para aprimorar a precisão da solução. Esse processo envolve a aplicação de métodos que iterativamente aproximam o valor do zero até que a precisão desejada seja alcançada.

Métodos iterativos

- Método de Bisseção;
- Método de Falsa Posição;
- Método de Newton-Raphson;
- Método de Ponto Fixo
- Método da Secante:

Método Iterativo

Métodos Iterativos

Métodos Iterativos consistem em uma sequência de comandos que devemos executar. alguns dos quais sendo repetidos algumas vezes. Cada método terá uma abordagem diferente. Cada repetição é denominada **iteração**
É fixada uma margem de erro ϵ, o processo iterativo termina após k iterações:

A1: Se $|\bar{x} - x^*| < \epsilon$, onde $\bar{x}$ é a raíz exacta e x^* a raíz aproximada ou;

A2: Se $|f(x^*)| < \epsilon$, ou ainda;

A3: Se atingirmos o número de iterações desejadas.

Os ceritérios descritos acima são chamados critérios de parada.

Método de Bisseção

Teorema de Bolzano

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então f possui pelo menos um zero no intervalo aberto (a, b).

O **método de bisseção** consiste em dividir o intervalo que contém o zero ao meio e por aplicação do Teorema de Bolzano, aplicado aos subintervalos resultantes, determinar qual deles contém o zero. O processo é repetido para o novo subintervalo até que se obtenha uma precisão prefixada. Desta forma, em cada iteração o zero da função é aproximado pelo ponto médio de cada subintervalo que a contém.

Método de Bisseção

Algoritmo do Método de Bisseção

Seja dada uma funąao que possui uma raíz no intervalo $[a; b]$ e pede-se para determinar a aproximação da raíz com uma precisão ϵ

A1: Considerar o intervalo inicial $[a; b]$

A2: Se $|b - a| < \epsilon$, escolha x^* qualquer desde que $x^* \in [a; b]$ como raíz aproximada e TERMINA o processo.

A3: Se $|b - a| \geq \epsilon$, considere $m = \dfrac{a+b}{2}$ e determine $f(a),\ f(m)$ e $f(b)$

A4: Se $f(a)f(m) < 0$, troque b por m. Caso contrário: $f(m)f(b) < 0$, troque a por m.

A5: Volte para o passo $A2$

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2, 3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	**0,0078**

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2, 3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	**0,0078**

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2, 3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	0,0078

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2, 3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	0,0078

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2,3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	**0,0078**

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2, 3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	0,0078

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2,3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	0,0078

Método da Bissecção

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x\ln x - 2$, tem um único zero em $(2,3)$. Calcule-a com precisão 10^{-2}.

k	a	b	m	$f(a)$	$f(b)$	$f(m)$	$b-a$
0	2	3	2,5	-0,6137	1,2958	0,2907	
1	2	2,5	2,25	-0,6137	0,2907	-0,1754	0,5
2	2,25	2,5	2,375	-0,1754	0,2907	0,0544	0,25
3	2,25	2,375	2,3125	-0,1754	0,0544	-0,0614	0,125
4	2,3125	2,3750	2,3438	-0,0614	0,0544	-0,0037	0,0625
5	2,3438	2,3750	2,3594	-0,0037	0,0544	0,0253	0,0313
6	2,3438	2,3594	2,3516	-0,0037	0,0253	0,0108	0,0156
7	2,3438	2,3516	2,3477	-0,0037	0,0108	0,0035	**0,0078**

Método da Bissecção

Após oito passos (contando com o inicial) ficamos com $b - a < \epsilon = 10^{-2}$. Assim, qualquer valor no intervalo $[2.3438, 2.3516]$ é uma aproximação do zero de $f(x)$. Podemos escolher o ponto médio $x^* = 2.3476$. Ou seja, $x = 2.3476 \pm 10^{-2}$.

Teorema

Suponha que $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$. O método de bissecção gera uma sequência $x_0, x_1, \ldots$ que se aproxima de uma raíz $\bar{x}$ de f com

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^k}.$$

Usando o teorema acima, podemos estimar o número de iterações do método da bissecção:

Método da Bissecção

Número de iterações

$$k = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right) \right\rceil = \frac{\ln \left[\frac{b-a}{\epsilon} \right]}{\ln(2)}.$$

Exemplo: Número de iterações

Seja $f(x) = x \ln x - 2$, tem um único zero em $(2, 3)$. Considerando a precisão 10^{-2}., determine quantas iterações serão necessárias para obter a solução.

Temos que $a = 2$ e $b = 3$, com $\epsilon = 0.01$. Então

$$k = \frac{\ln \left[\frac{b-a}{\epsilon} \right]}{\ln(2)} = \frac{\ln \left[\frac{1}{0.01} \right]}{\ln(2)} = 6.64 \approx 7 \text{ iterações.}$$

Método de Falsa Posição

Considere uma função $f(x)$ contínua que possui uma única raíz em $[a; b]$. Se por acaso, $f(a) = -1$ e $f(b) = 2000$, o método de bisseção dividirá o intervalo ao meio, apesar de ser mais provável que a raiz esteja mais perto de a que de b (ou vice versa). Isso deveria acontecer, pelo menos se $f(x)$ fosse uma função do primeiro grau, pois não possui trajectórias.

Como forma de aproximar de forma o mais rápido possivel a raíz entre a e b, vamos associá-lo a uma equação do primeiro grau.

Temos na nossa posse os pontos $a; f(a)$ e $b; f(b)$. A equação da recta que passa por esses pontos é dada por

$y - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Mas para a raíz $x^* \in [a; b]$ o seu valor associado $y = f(x^*) = 0$.

Da equação anterior, temos que:

Método deFalsa Posição

Da equação anterior, temos que:

$-f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x^* - a)$, isolando o x^* temos que:

$$x^* = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

O algoritmo usado no método da Falsa posição é exactamente o mesmo do método da bisseção, trocando o ponto médio m em cada etapa pelo $m = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$.

Para facilitar, adiciona-se o critério de parada associado ao valor da função $f(x^*)$

Método de Falsa Posição

Algoritmo

A1: Considerar o intervalo inicial $[a; b]$ e precisão ϵ

A2: Seja $m = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$;

A3: Se $b - a < \epsilon$ ou $|f(m)| < \epsilon$, tome m como a aproximação do zero;

A4: Caso contrário, se $f(a)f(m) < 0$, troque b por m e se $f(m)f(b) < 0$, troque a por m;

A5: Volte para o passo $A2$

Método de Falsa Posição

Exemplo. Vimos num dos exemplos que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, tem um único zero em $(0, 1)$. Calcule-a com precisão 10^{-3}.

k	a	b	$f(a)$	$f(b)$	m	$f(m)$	$b-a$
0	0	1	1	-1	0.5	-0,375	
1	0	0,5	1	-0,375	0363636	-0,04282	0,5
2	0	0,363636	1	-0,04282	0,348703	-0,00371	0,363636
3	0	0,348703	1	-0,00371	0,347414	-0,00031	0,348703

Após 3 iterações, chegamos a $|f(x^*)| = 0.00031 < \epsilon$, o que encerra o método com a raiz aproximada. Note que o valor de $|b-a|$ diminui a cada iteração, mas de forma muito lenta, o que mostra que foi fundamental acrescentar a condição de parada $|f(x^*)| < \epsilon$.


GARANTE O TEU FUTURO
COM UMA FORMAÇÃO SÓLIDA
ISUTC
Prolong. da Av. Kim Il Sung (IFT/TDM) Edifício
D1
Maputo, Moçambique
www.facebook.com/isutc
www.transcom.co.mz/isutc